Оценивание коэффициентов модели ARMA. Оценивание параметров модели AR(p) методом наименьших квадратов. Оценивание параметров модели MA(q) методом максимального правдоподобия и с помощью процедуры поиска на сетке.

Модель $AR(p) : \alpha_1 x_{t-1} + ... + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t$.
Для нее можно применить обычный метод наименьших квадратов (МНК). Поскольку регрессоры относятся к предыдущим моментам времени $(t - j \neq t)$, а ε_t - белый шум, то корреляция регрессоров x_{t-j} со случайным возмущением ε_j отсутствует. Метод наименьших квадратов (МНК) дает:

1. смещенные оценки $\mathsf{E}\widehat{\theta} \neq \theta$;
2. состоятельные оценки $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{\theta} \to \theta$, несмотря на то, что присутствует стохастический регрессор.

Нужно проверить по остаткам, действительно ли наши предположения о том, что ε_t - белый шум, выполнены.

Если дополнительно белый шум является гауссовым $(\varepsilon_t \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2))$, то значения x_t распределены нормально, а оценки коэффициентов $\widehat{\alpha}_1, ..., \widehat{\alpha}_p$ произведенные МНК, состоятельны и асимптотически нормальны.

Если данные имеют ненулевое выборочное среднее $\bar{x}$, то можно либо вычесть это среднее из данных и строить регрессию без свободного члена, т.е. рассматривать $x_t - \bar{x}$, либо просто строить регрессию со свободным членом θ.

Другими словами, для оценки математического ожидания процесса $AR(p)$ можно использовать две статистики: $\bar{x} = \dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T} x_t$ и $\widehat{\mu} = \dfrac{\widehat{\theta}}{1 - \widehat{\alpha}_1 - ... - \widehat{\alpha}_p}$, в которой использованы оценки МНК. Для гауссова процесса ε_t обе оценки состоятельны и асимптотически нормальны. Более того, обе они асимптотически независимы от оценок параметров модели, полученных МНК.

Для моделей скользящего среднего $MA(q)\Big(x_t = \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j}\Big)$ невозможно аналитически выразить остаточную сумму квадратов через значения реализации x_t и параметры модели, а следовательно, применить МНК.

В предположении нормальности ошибки ε_t выражаем ковариационную матрицу ошибок (ее элементы - значения автокорреляционной функции) через параметры $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$ обратимой модели $MA(q)$. Функция правдоподобия для нормального распределенного вектора $\vec{x} = [x_1, x_2, ..., x_T]'$ имеет вид

$$L(\vec{\beta}, \sigma_\varepsilon^2 \sum_x |\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2})^T}\Big(\sqrt{det \sum_x}\Big)^{-1} exp\Big(- \frac{(\vec{x} - \bar{x}) \sum_x^{-1} (\vec{x} - \bar{x})}{2\sigma_\varepsilon^2}\Big)$$

$$\varepsilon \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 \sum_x)$$

Здесь через $\sum_x$ обозначена ковариационная матрица процесса $\vec{x}$. Элементы этой матрицы выражаются, согласно свойству обратимости, через параметры модели $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$, поэтому процедура численной оптимизации (максимизации функции правдоподобия) позволяет найти оценки метода максимального правдоподобия, которые будут обладать обычными свойствами состоятельности и асимптотической нормальности. Кроме того, оценки параметров модели $MA(q)$ и оценка дисперсии случайного возмущения асимптотически независимы.

Для оценки параметров модели $ARMA(p,q)$ может применяться комбинация метода наименьших квадратов с поиском на сетке.

Рассмотрим модель $ARMA(2,2)$.

Пусть уравнение модели имеет вид

$$(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2)x_t=(1+\beta_1 L+\beta_2 L^2)\varepsilon_t$$

Его можно переписать в виде

$$x_t=\frac{(1+\beta_1 L+\beta_2 L^2)\varepsilon_t}{1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2}$$

Введем вспомогательный случайный процесс $x_t=\dfrac{\varepsilon_t}{1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2}$. Тогда процессы x_t и z_t связаны соотношением $x_t=(1+\beta_1 L+\beta_2 L^2)z_t$, которое напоминает уравнение $MA(2)$, только вместо ε_t стоит z_t.

Определим "наблюдения"z_t через наблюдения x_t, сконструировав z_t так же, как ранее остатки модели МА, т.е. значения z_t, которые еще не определены (с нулевыми и отрицательными индексами), полагаем равными нулю. Тогда:

$$z_1=x_1 \quad (x_1=z_1+\beta_1 z_0(=0)+\beta_2 z_{-1}(=0))$$

$$z_2=x_2-\beta_1 z_1 \quad (x_2=z_2+\beta_1 z_1+\beta_2 z_0(=0))$$

$$z_3=x_3-\beta_1 z_2-\beta_2 z_1$$

$$\dots$$

Далее из определения процесса z_t следует, что значения z_t связан с остатками e_t исходной модели следующими соотношениями: $z_t-\alpha_1 z_{t-1}-\alpha_2 z_{t-2}=e_t$. Относительно процесса z_t модель стала $AR(2)$.

Зная "реализацию"z_t для выбранных значений коэффициентов (β_1^0,β_2^0), можно оценить коэффициенты α_1,α_2 с помощью МНК.

В результате находим оценки коэффициентов $(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2)$, но получены они по-разному. Оценки $(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2)$ заданы как начальные значения, т.е. $(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2)=(\beta_1^0,\beta_2^0)$. А потом, исходя из них, построены оптимальные оценки $(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2)$.

Применяя численные методы оптимизации (например, поиск на сетке) оцениваем значения параметров, обеспечивающие $\min\limits_{\alpha_1,\alpha_1,\beta_1,\beta_2}\sum e_i^2$.

Если ε_t - белый гауссовский шум, то **для оценивания модели $ARMA(p,q)$** можно такде применять **метод максимального правдоподобия**.

Общая схема его применения следующая.

1. Выражаем значения автокорреляционной функции процесса через параметры модели $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p,\beta_1,\beta_2,...,\beta_q$
2. Строим ковариационную матрицу порядка
3. Записываем функцию правдоподобия для имеющейся выборки $x_1,...,x_T$
4. Решаем (как правило, численно) систему уравнений правдоподобия относительно оценок коэффициентов $\widehat{\alpha}_1,\widehat{\alpha}_2,...,\widehat{\alpha}_p,\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2,...,\widehat{\beta}_q$